

Validierungsheft

Nachvollziehbare Prüfbeispiele für Hebelwerk – den Editor von baecut

Wozu dieses Heft

Ein Rechenwerkzeug ist so viel wert wie das Vertrauen in seine Ergebnisse. Dieses Heft stellt jedem Prüfbeispiel die Handrechnung gegenüber: Aufgabe, Rechenweg von Hand, Ergebnis des Programms, Abweichung. Alle Beispiele lassen sich im Editor nachbauen und nachrechnen.

Die Beispiele laufen bei jedem Bau des Programms automatisch mit. Schlägt eines fehl, wird nicht ausgeliefert. Die Rechnungen stammen aus derselben Quelle wie das Programm – geprüft wird also, was der Nutzer bekommt, nicht ein Nachbau.

Neben diesen Prüfbeispielen läuft ein Prüfstand aus dreizehn Schritten, darunter rund 680 Gegenrechnungen und eine Prüfung, die jede im Nachweis angezeigte Formel auswertet und jede eingesetzte Zeile nachrechnet: was auf dem Beleg steht, muss das Ergebnis daneben ergeben. Zeilen, deren Wert aus einer Tabelle oder einem Verlauf abgelesen wird, sind als nicht nachrechenbar ausgewiesen.

Was dieses Heft nicht ist

Es ist kein vollständiger Nachweis der Bemessungsverfahren nach Norm. Geprüft sind die kinematischen und statischen Grundlagen – Gleichgewicht, Hebelarme, Momentensummen, geometrische Bedingungen – und seit dieser Ausgabe zusätzlich die Grundbeziehungen der Nachweisverfahren: das Reibmoment im Gelenk, Federrate und Schubspannung der Druckfeder, Formzahl und Stützzahl am Wellenabsatz, das reduzierte Trägheitsmoment des Antriebs und das Verhalten des Optimierers an einer Aufgabe mit bekanntem Ergebnis.

Seit Ausgabe 1.2 wird zusätzlich gegen Quellen geprüft, die nicht hier entstanden sind: gegen zwei Auslegungsmappen aus der Praxis, gegen die Zahlenwerte der Tabelle A1 aus VDI 2230 Blatt 1 und gegen die Formeln von EN 1993-1-1 für das Biegeknicken.

Herkunft der Profiltabelle (seit v287)

Das Querschnittsfenster führt eine eingebettete Normprofilreihe mit 215 Baugrößen in elf Reihen. Sie entsteht auf zwei Wegen, und der Weg steht an jeder Baugröße im Programm: Die gewalzten Profile IPE, HEA, HEB, HEM (Maße und Querschnittswerte nach DIN 1025-5 bzw. -3/-2/-4 in der Fassung von EN 10365), UPE (DIN 1026-2), UNP (DIN 1026-1) und L gleichschenkelig (EN 10056-1) sind ABGESCHRIEBENE Tabellenwerte. Sie müssen es sein: die Ausrundung zwischen Steg und Flansch lässt sich aus h , b , s und t nicht nachrechnen und trägt bei IPE 200 rund 5 % zu I_y bei. Rundrohr, Quadratrohr, Flachstahl und Rundstahl dagegen sind GERECHNET, und zwar aus der Normgeometrie selbst: der Kreisring exakt ($A = \pi/4 \cdot (D^2 - d^2)$, $I = \pi/64 \cdot (D^4 - d^4)$), das Quadratrohr mit den in EN 10219-2 festgelegten Eckradien der kaltgefertigten Reihe ($r_a = 2,0 \cdot t$ für $t \leq 6$ mm, $2,5 \cdot t$ bis 10 mm, $3,0 \cdot t$ darüber). Die Masse je Meter folgt aus $A \cdot 7850$ kg/m³.

Was die Tabelle nicht ist: eine Normausgabe. Sie ersetzt keine. Wer einen Nachweis abstempelt, prüft die Baugröße gegen sein eigenes Tabellenbuch; das Programm sagt an der Baugröße, woher es die Zahl hat, und das ist alles, was es sagen kann. Torsions- und plastische Widerstandsmomente sind nicht enthalten, weil sie im Programm nirgends gebraucht werden.

Biegelinie je Glied (seit v287)

Die Durchbiegung δ eines Glieds entsteht NICHT im Rechenkern, sondern danach: aus dem Momentenverlauf desselben Schnittgrößendurchgangs, zweimal integriert ($w'' = -M/EI$, Trapezregel über 41 Stützstellen) mit EI aus dem zugewiesenen Querschnitt. Randbedingungen werden nicht geraten. Gerechnet wird nur bei einem beidseitig gelenkig angeschlossenen Glied und bei einem erkennbaren Kragarm (Festlager mit Drehvorgabe an einem Ende, freies Ende am anderen); jedes andere Lagerbild bleibt leer und nennt im Fenster seinen Grund. Schubverformung und der Anteil aus der Normalkraft sind nicht enthalten (Bernoulli-Hypothese).

Gegengerechnet ist die Funktion gegen die beiden geschlossenen Lösungen der Festigkeitslehre: beidseitig gelenkiger Träger unter Gleichlast, $w_{\max} = 5qL^4/(384 \cdot EI)$, und Kragarm mit Einzellast am Ende, $w_{\max} = F \cdot L^3/(3 \cdot EI)$. Bei der Stützstellenzahl des Programms (41) beträgt die Abweichung 0,100 % bzw. 0,016 %; sie ist reine Trapezregel-Feinheit und geht mit vervierfachter Stützstellenzahl auf 0,006 % bzw. 0,001 % zurück.

Was weiterhin aussteht, ist die Gegenrechnung gegen die vollständigen Beispielrechnungen der Normen selbst (DIN 3990, DIN 743, DIN EN 13906-1, FKM-Richtlinie). Sie folgt in Ausgabe 2, sobald die Normausgaben vorliegen.

Wo ein Verfahren vereinfacht ist, sagt das Programm es an der Rechenstelle und in der Gültigkeitstabelle des jeweiligen Reiters.

Aufbau

Jede Zeile nennt Aufgabe, Handrechnung, Programmergebnis und Abweichung in Prozent. Die Spalte „Grundlage“ gibt an, worauf die Handrechnung beruht.

Zusammenfassung

FACHGEBIET	BEISPIELE	GRÖSSTE ABWEICHUNG	VERGLEICHSWERTE AUS
Statik: Gleichgewicht und Auflagerkräfte	4	< 0,001 %	Statik-Grundfall: $A = F/2$; $B = F/2$; SumM um A
Momente und Hebelarme	9	< 0,001 %	SumM = 0 im Gleichgewicht; $h = M / F $; Handrechnung am Momentenpunkt
Teilsystemfreischnitt	2	< 0,001 %	SumF = 0 am Teilsystem; Symmetrie
Zwangsbedingungen	3	< 0,001 %	Abstand Punkt-Gerade; Zwangsbedingung; Kopplung der Vorgaben
Geometrie und Skizzenbedingungen	7	< 0,001 %	Interpolationseigenschaft; Grenzfall; Pythagoras 3-4-5
Nachweisverfahren: Reibung, Feder, Welle, Antrieb, Optimierung	10	< 0,001 %	$M_R = m \cdot F \cdot r_z$; $\eta = M_{\text{ohne}} / M_{\text{mit}}$; DIN EN 13906-1: $R = G \cdot d^4$
Zylinderauslegung (gegen eine fremde Auslegungsmappe)	6	< 0,001 %	Auslegungsmappe des Anwenders; dieselbe Mappe
Gelenkbolzen und Dauerfestigkeit (gegen eine fremde Mappe)	5	< 0,001 %	FKM-Mappe des Anwenders; dieselbe Mappe
Knicken nach EN 1993-1-1 (gegen die Normformel)	3	< 0,001 %	EN 1993-1-1
Teleskop mit wanderndem Schwerpunkt (gegen eine fremde Mappe)	3	< 0,001 %	Kinematikmappe des Anwenders; dieselbe Mappe
Schraubverbindung (gegen das Tabellenbuch)	3	0,390 % (Nr, 54)	VDI 2230 Blatt 1

Insgesamt 55 Prüfbeispiele. Die größte Abweichung beträgt 0,390 % und tritt bei Nr. 54 auf (Schraube: Anziehdrehmoment): dort wird gegen einen gerundeten Tabellenwert verglichen, nicht gegen eine exakte Rechnung – die Abweichung liegt in der Rundung der Tabelle, nicht im Programm.

Die Beispiele 1 bis 35 vergleichen mit Handrechnungen. Die Beispiele ab 36 vergleichen mit Zahlen, die NICHT hier entstanden sind: mit Auslegungsmappen aus der Praxis, mit den Formeln der Norm und mit Tabellenbüchern. Das ist die stärkere Aussage – eine Handrechnung kann denselben Denkfehler enthalten wie das Programm, eine fremde Quelle nicht.

1 · Statik: Gleichgewicht und Auflagerkräfte

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
1	Balken auf zwei Stuetzen, Einzellast mittig L = 2,000 m, F = 1000 N senkrecht bei x = 1,000 m. Gesucht: Auflagerkraft A.	Statik-Grundfall: $A = F/2$	500 N	500 N	< 0,001 %
2	dasselbe, Auflagerkraft B Gesucht: Auflagerkraft B.	$B = F/2$	500 N	500 N	< 0,001 %
3	Balken mit Einzellast und aeusserem Moment Zusaetzlich M = 200 Nm am Stab. Handrechnung: $\text{SumM}(A) = 0 \rightarrow B = (1000 \cdot 1 - 200)/2 = 400 \text{ N}$.	SumM um A, dann SumFy	600 N	600 N	< 0,001 %
4	dasselbe, Auflagerkraft B Gesucht: B.	SumM um A	400 N	400 N	< 0,001 %

2 · Momente und Hebelarme

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
5	Momentensumme um das linke Lager SumM(A) fuer den Balken aus Beispiel 1.	SumM = 0 im Gleichgewicht	0 Nm	0 Nm	< 0,001 %
6	Hebelarm der rechten Lagerkraft Senkrechter Abstand von A zur Wirklinie von B.	$h = M / F $	2 m	2 m	< 0,001 %
7	Auflösung nach der gesuchten Kraft B aus SumM = 0: $B = \text{SumM uebrige} / h$.	Handrechnung am Momentenpunkt	500 N	500 N	< 0,001 %
8	Hebelarm bei schraeger Kraft $F = 1000 \text{ N}$ unter 30 Grad, Angriff bei $r = 3,000 \text{ m}$. $h = r \cdot \sin(\phi)$.	$h = r \cdot \sin(\phi) = 3 \cdot 0,5$	1.5 m	1.5 m	< 0,001 %
9	eingeschlossener Winkel phi Winkel zwischen Ortsvektor und Kraft.	geometrisch	30 Grad	30 Grad	< 0,001 %
10	Gegenprobe: h ueber $r \cdot \sin(\phi)$ Zweiter Rechenweg fuer denselben Hebelarm.	unabhaengiger Weg	1.5 m	1.5 m	< 0,001 %
11	Momentanteil aus Fx $F = (800 \mid -1200) \text{ N}$ bei $(2 \mid 1,5)$, Bezug $(0,5 \mid 0,5)$. Anteil = $-r_y \cdot F_x$.	Zerlegung von Hand	-800 Nm	-800 Nm	< 0,001 %
12	Momentanteil aus Fy Anteil = $r_x \cdot F_y$.	Zerlegung von Hand	-1800 Nm	-1800 Nm	< 0,001 %
13	Summe beider Anteile Muss dem Gesamtmoment entsprechen.	$M_i = r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x$	-2600 Nm	-2600 Nm	< 0,001 %

3 · Teilsystemfreischnitt

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
14	Zweibock: Kraeftegleichgewicht am Teilsystem Zwei Staee unter 45 Grad, $F = 1000 \text{ N}$ am Scheitel. SumFy am freigeschnittenen Teilsystem.	SumF = 0 am Teilsystem	0 N	-3.5e-06 N	< 0,001 %
15	Zweibock: Auflagerkraft senkrecht Je Lager traegt die Haelfte.	Symmetrie	500 N	500 N	< 0,001 %

4 · Zwangsbedingungen

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
16	Bedingung tangential Glied soll einen Kreis $r = 0,5 \text{ m}$ beruehren. Abstand Mittelpunkt zur Gliedachse.	Abstand Punkt-Gerade	0.5 m	0.5 m	< 0,001 %
17	Gliedlaenge bleibt dabei erhalten Die Bedingung darf den Stab nicht laengen.	Zwangsbedingung	2.1932 m	2.1932 m	< 0,001 %
18	Bedingung gleich lang Glied 11 (3,000 m) uebernimmt die Laenge von Glied 10 (1,000 m).	Kopplung der Vorgaben	1 m	1 m	< 0,001 %

5 · Geometrie und Skizzenbedingungen

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
19	Spline laeuft durch seine Stuetzpunkte Catmull-Rom durch vier Punkte; Abweichung am Punkt (1 1).	Interpolationseigenschaft	0 m	0 m	< 0,001 %
20	zwei Stuetzpunkte ergeben eine Gerade Groesster Ausschlag quer zur Verbindung.	Grenzfall	0 m	0 m	< 0,001 %
21	Kreisradius aus zwei Punkten Mittelpunkt (1 1), Randpunkt (4 5).	Pythagoras 3-4-5	5 m	5 m	< 0,001 %

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
22	Bogen: Endwinkel Mittelpunkt (0 0), Start (2 0), Ende (0 2).	atan2	90 Grad	90 Grad	< 0,001 %
23	Winkel zwischen zwei Geraden Waagrechte und Senkrechte.	Definition	90 Grad	90 Grad	< 0,001 %
24	Abstand paralleler Geraden Zwei Parallelen mit Richtung (3 4), Versatz (-4 3).	Abstand Punkt-Gerade	5 m	5 m	< 0,001 %
25	Skizzenbedingung tangential Waagrechte auf y = 3 soll den Kreis r = 1 um (0 0) beruehren.	Beruehrbedingung	1 m	1 m	< 0,001 %

6 · Nachweisverfahren: Reibung, Feder, Welle, Antrieb, Optimierung

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
26	Gelenkreibung: Reibmoment am Lager Pendel L = 1,000 m, m = 100 kg waagrecht. Lager mit Gleitreibwert 0,10 und Bolzen 40 mm (r_z = 20 mm).	$M_R = m \cdot y \cdot F \cdot r_z$ (DIN-freie Grundbeziehung)	1.962 Nm	1.962 Nm	< 0,001 %
27	Gelenkreibung: Wirkungsgrad Verhaeltnis Antriebsmoment ohne zu Antriebsmoment mit Reibung.	$\eta = M_{\text{ohne}} / M_{\text{mit}}$	0.998 -	0.998 -	< 0,001 %
28	Druckfeder: Federrate Kaltgeformte Druckfeder, d = 4 mm, D = 32 mm, n = 8, G = 81500 N/mm ² .	DIN EN 13906-1: $R = G \cdot d^4 / (8 \cdot D^3 \cdot n)$	9.9487 N/mm	9.9487 N/mm	< 0,001 %
29	Druckfeder: Schubspannung bei F = 600 N Unkorrigierte Schubspannung im Draht.	$\tau = 8 \cdot D \cdot F / (\pi \cdot d^3)$	763.9437 N/mm ²	763.9437 N/mm ²	< 0,001 %
30	Welle: Formzahl am Absatz (Biegung) Absatz d = 40 mm, D = 50 mm, r = 2,5 mm, also t = 5 mm.	DIN 743-2, Formzahlnaeherung	1.8953 -	1.8953 -	< 0,001 %
31	Welle: Stuetzzahl Gleiche Kerbe, Streckgrenze 800 N/mm ² .	DIN 743-2: $n = 1 + \sqrt{(G') \cdot 10^{-(0,33 + \text{sigS}/712)}}$	1.0367 -	1.0367 -	< 0,001 %
32	Elektroantrieb: reduziertes Traegheitsmoment Punktmasse 100 kg auf Radius 1,000 m um die Antriebsachse.	$J = m \cdot r^2$ (Punktmasse)	100 kg*m ²	99.9998 kg*m ²	< 0,001 %
33	Elektroantrieb: Moment an der Motorwelle Abtriebsmoment 981 Nm ueber i = 100 und Wirkungsgrad 0,90.	$M_{\text{mot}} = M_{\text{ab}} / (i \cdot \eta)$	10.9 Nm	10.9 Nm	< 0,001 %
34	Kleinster Uebertragungswinkel Zwei Glieder treffen sich im Gelenk unter einem rechten Winkel.	Definition des Uebertragungswinkels	90 Grad	90 Grad	< 0,001 %
35	Optimierer: bekanntes Minimum Nelder-Mead auf $f(x,y) = (x-3)^2 + (y+1)^2$, Start (0 0). Gesucht: x-Wert im Minimum.	analytisches Minimum bei (3 -1)	3 -	3 -	< 0,001 %

7 · Zylinderauslegung (gegen eine fremde Auslegungsmappe)

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
36	Zylinder: Kraft beim Ausfahren Kolben 30 mm, Stange 20 mm, 200 bar. Gesucht: $F = A_K \cdot p$.	Auslegungsmappe des Anwenders, Blatt Berechnung	1.414e+04 N	1.414e+04 N	< 0,001 %
37	Zylinder: Kraft beim Einfahren Dieselbe Angabe, Ringflaeche. Gesucht: $F = A_R \cdot p$.	dieselbe Mappe	7854 N	7854 N	< 0,001 %

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
38	Zylinder: Hub aus den Zylinderlaengen l_max 535,0345 mm minus l_min 364,9215 mm.	dieselbe Mappe	170.113 mm	170.113 mm	< 0,001 %
39	Zylinder: Geschwindigkeit beim Ausfahren Volumenstrom 30 l/min auf die Kolbenflaeche.	dieselbe Mappe	707.3553 mm/s	707.3553 mm/s	< 0,001 %
40	Zylinder: Hubzeit beim Ausfahren Hub durch Geschwindigkeit.	dieselbe Mappe	0.2405 s	0.2405 s	< 0,001 %
41	Zylinder: Reserve im Baumass l_min minus Hub minus Aufbaumass 200 mm. Negativ heisst: kein Standardzylinder passt.	dieselbe Mappe, Blatt Zylinder Standardabmass	-5.1915 mm	-5.1915 mm	< 0,001 %

8 · Gelenkbolzen und Dauerfestigkeit (gegen eine fremde Mappe)

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
42	Bolzen: Scherspannung zweischnittig Bolzen 40 mm, F = 190066 N auf zwei Scherflaechen.	FKM-Mappe des Anwenders, Blatt Bolzen	75.625 N/mm^2	75.625 N/mm^2	< 0,001 %
43	Bolzen: Lochleibung im Auge F auf 40 mm mal 50 mm Augenbreite.	dieselbe Mappe	95.0332 N/mm^2	95.0332 N/mm^2	< 0,001 %
44	Bolzen: Kraftamplitude ueber den Hub F_max 190066 N, F_min -158258 N. Gesucht: (F_max-F_min)/2.	dieselbe Mappe, Blatt FKM_Nachweis	1.742e+05 N	1.742e+05 N	< 0,001 %
45	Bolzen: Biegespannungsamplitude Amplitude ueber den Hebelarm (t_L+2t_G)/8 auf das Widerstandsmoment.	dieselbe Mappe	311.8359 N/mm^2	311.8359 N/mm^2	< 0,001 %
46	Bolzen: zulaessige Dauerspannung Wechselspannung 280 mal K_D 0,85 durch j_D 1,5.	dieselbe Mappe	158.6667 N/mm^2	158.6667 N/mm^2	< 0,001 %

9 · Knicken nach EN 1993-1-1 (gegen die Normformel)

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
47	Knicken EC3: bezogener Schlankheitsgrad Quadratrohr 100x100x5, Knicklaenge 2,000 m, S355.	EN 1993-1-1, 6.3.1.3	0.674 -	0.674 -	< 0,001 %
48	Knicken EC3: Abminderungsbeiwert chi Knicklinie c, alpha = 0,49.	EN 1993-1-1, Gl. 6.49	0.7407 -	0.7407 -	< 0,001 %
49	Knicken EC3: Tragfaehigkeit N_b,Rd chi mal A mal f_y durch gamma_M1 = 1,10.	EN 1993-1-1, Gl. 6.47	4.542e+05 N	4.542e+05 N	< 0,001 %

10 · Teleskop mit wanderndem Schwerpunkt (gegen eine fremde Mappe)

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
50	Teleskop: Lastmoment eingefahren Ausleger 1,700 m, G3 = 1950 N mit Schwerpunkt 1,200 m, Werkzeug 5800 N an der Spitze.	Kinematikmappe des Anwenders, Blatt Parameter	1.22e+04 Nm	1.22e+04 Nm	< 0,001 %
51	Teleskop: Lastmoment ausgefahren 1000 mm Auszug, Mitfuehrungsfaktor 0,95.	dieselbe Mappe	1.985e+04 Nm	1.985e+04 Nm	< 0,001 %
52	Teleskop: Zuwachs je Millimeter Auszug Differenz der beiden Lastmomente durch 1000 mm.	dieselbe Mappe, Blatt Bewertung	7.6525 Nm/mm	7.6525 Nm/mm	< 0,001 %

11 · Schraubverbindung (gegen das Tabellenbuch)

NR	AUFGABE	GRUNDLAGE	HAND	PROGRAMM	ABW.
53	Schraube: zulaessige Montagevorspannkraft M12 8.8, Reibung 0,12, Ausnutzung 90 % der Streckgrenze.	VDI 2230 Blatt 1, Tabelle A1 (43,1 kN)	4.31e+04 N	4.313e+04 N	0,0665 %
54	Schraube: Anziehdrehmoment Dieselbe Angabe, Kopfreibung ueber den Auflagedurchmesser.	VDI 2230 Blatt 1, Tabelle A1 (87,3 Nm)	87.3 Nm	87.6402 Nm	0,3897 %
55	Schraube: Nachgiebigkeit mit Schaft Klemmlaenge 30 mm davon 20 mm Schaft; Kopf, Schaft und Einschraubteil mit dem Nennquerschnitt, das freie Gewinde mit dem Kernquerschnitt.	VDI 2230 Blatt 1, Abschnitt 5.1.1	1.968e-06 mm/N	1.968e-06 mm/N	< 0,001 %

Ergebnis: 53 von 55 Prüfbeispielen stimmen mit der Handrechnung überein. Abweichungen über 0,001 % treten bei 2 Beispielen auf; sie stammen aus iterativ gerechneten Verfahren (Reibung, Störungsrechnung) und aus dem Vergleich mit gerundeten Tabellenwerten. Jede ist in der Spalte Abweichung beziffert: Nr. 54 0,390 %; Nr. 53 0,067 %.